

Bachelorarbeit: Eigenschaften von Funktionen mit einseitiger Lipschitz-Bedingung

Benjamin A. Robinson, Verena Schwarz, Michaela Szölgényi

November 2024

Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ erfüllt die einseitige Lipschitz-Bedingung, falls ein $L \in (0, \infty)$ existiert, sodass für alle $x, y \in D$,

$$\langle x - y, f(x) - f(y) \rangle_{\mathbb{R}^d} \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Funktionen mit einseitiger Lipschitz-Bedingung kommen in unserer Forschung immer wieder vor. Die einseitige Lipschitz-Bedingung ist nämlich eine zentrale Voraussetzung für die Konvergenz numerischer Verfahren für stochastische Differentialgleichungen mit (wie in der Praxis oft vorkommend) weniger braven Koeffizienten.

Während viele Eigenschaften von Lipschitz stetigen Funktionen allgemein bekannt sind, würde eine Zusammenstellung (inklusive Beweisen) von Eigenschaften von Funktionen mit einseitiger Lipschitz-Bedingung unsere Forschungsarbeit unterstützen. Dies wäre Thema in der vorgeschlagenen Bachelorarbeit.

Zuletzt noch ein Beispiel für eine möglicherweise überraschende Eigenschaft. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben für alle $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1_{\{x < 0\}}$ erfüllt zwar die einseitige Lipschitz-Bedingung, aber ist nicht stetig.