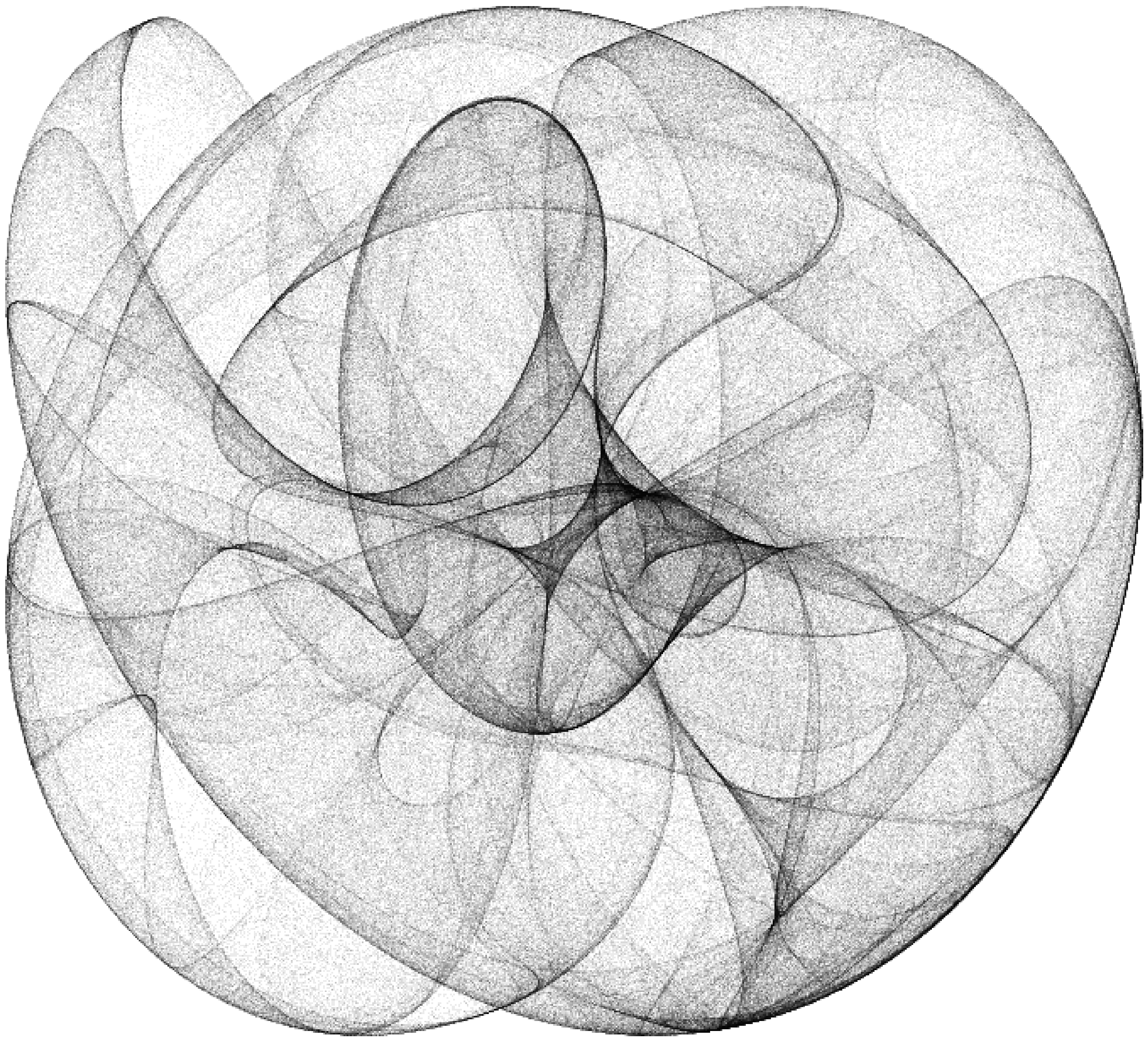
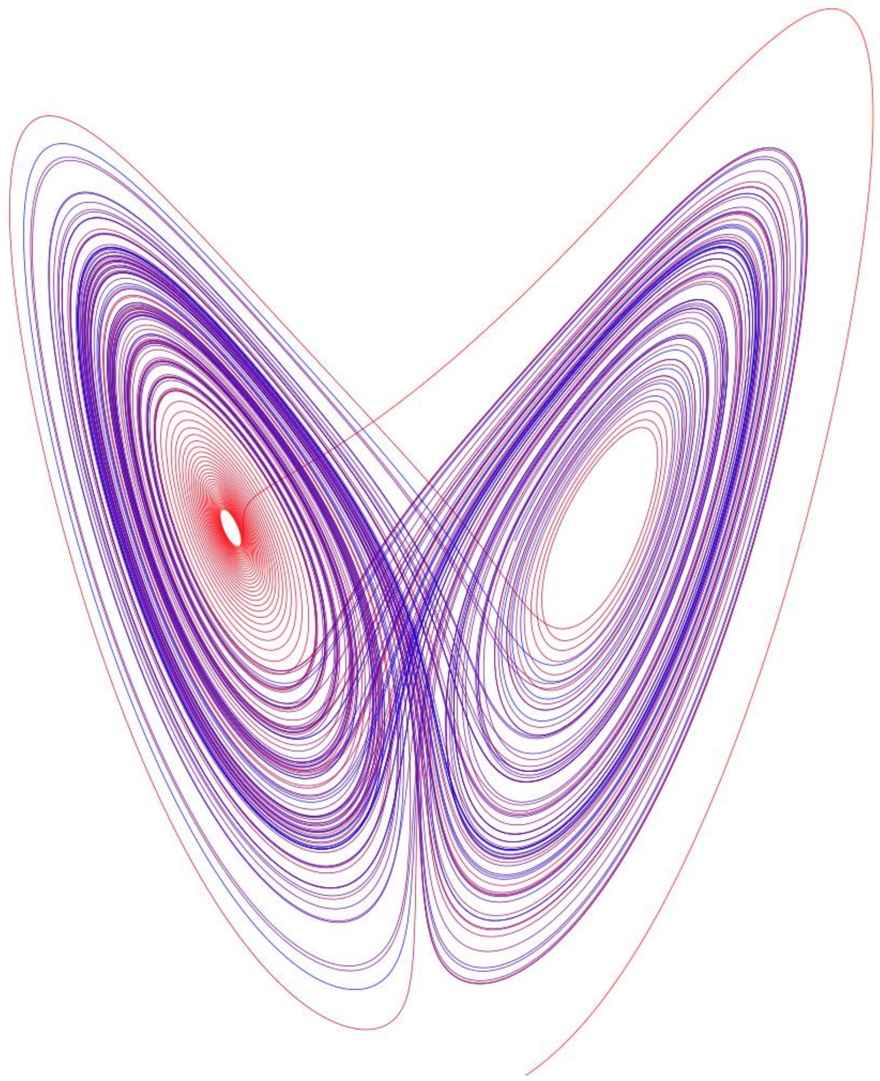
Arbeitsgruppe Dynamische Systeme - Institut für Mathematik



Das 2D Clifford-Attraktor
Quelle: https://sequelaencollection.home.blog/2d-chaotic-attractors/



Eine Lösungskurve des Lorenz-Systems
Quelle: Wkipedia

Mitglieder

Christian Aarset, Ábel Garab,
Victoria Grushkovskaya, Huy Huynh,
Abdullah Kalkan, Christian Pötzsche

Was ist ein dynamisches System?

"A dynamical system is a concept in mathematics where a fixed rule describes the time dependence of a point in a geometrical space."
(aus Wikipedia)

Was ist ein dynamisches System?

Beispiel: Mathematisches Pendel

Frage Wie ist der Zustand des Pendels
zu einem gewünschten Zeitpunkt?

Eingabe

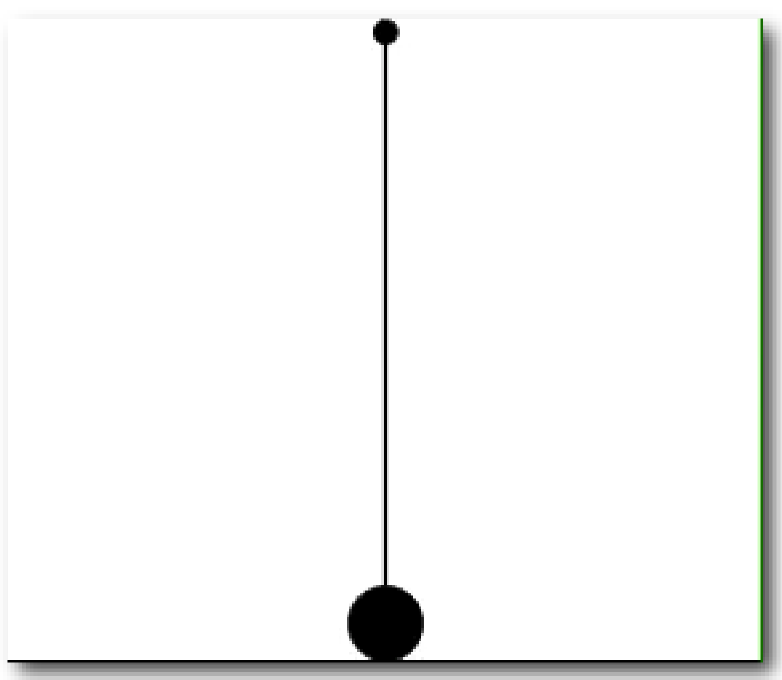
- Auslenkungswinkel ϕ_0
- Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0$

Zustandsraum

$$X = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

Winkel ϕ

Geschwindigkeit $\dot{\phi}$



Was ist ein dynamisches System?

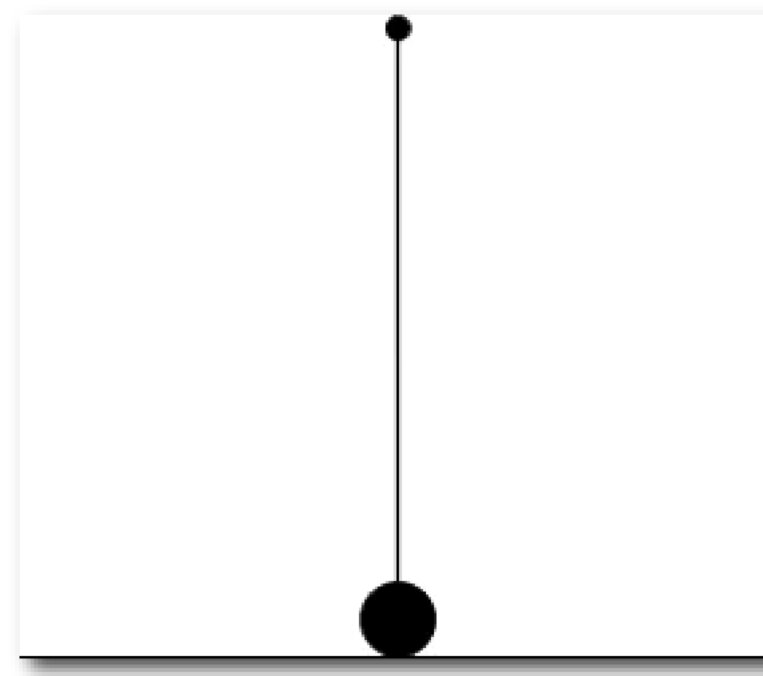
Beispiel: Mathematisches Pendel

Bewegungsgesetz (Newton)

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$$

Ausgabe

- Auslenkungswinkel $\phi(t)$
- Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$



Was ist ein dynamisches System?

Beispiel: Dispersion

Frage: Wie entwickeln sich biologische Populationen räumlich und zeitlich?

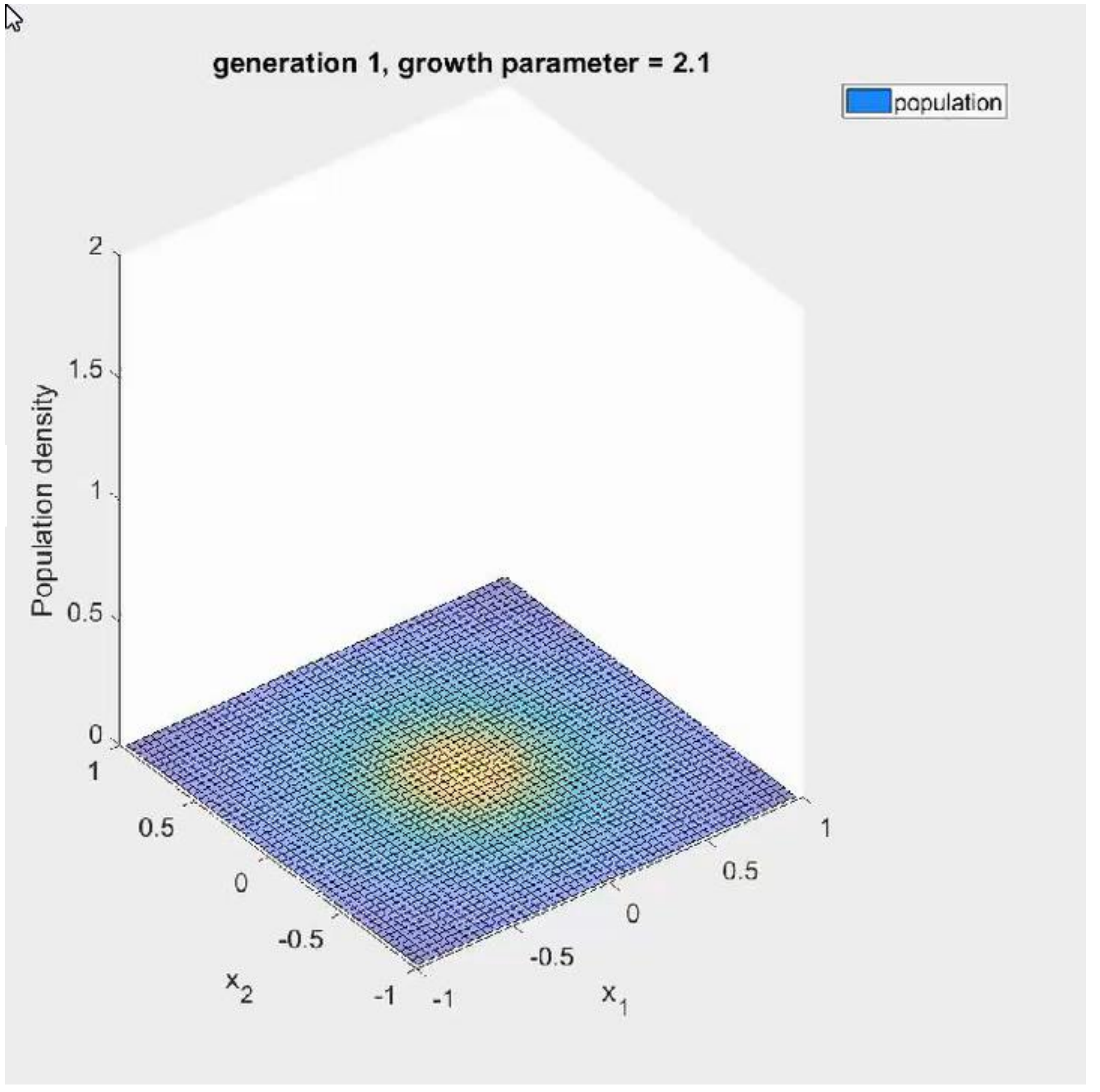
Eingabe
- Räumliche Verteilung $u_0 \colon \Omega = [-1,1]^2 \to [0,\infty)$ zur Zeit 0

Zustandsraum
- Raum aller Verteilungen (Funktionenraum)

Bewegungsgesetz

$$u_{t+1}(x) = \frac{\alpha}{2} \int_{[-1,1]^2} e^{-|x-y|} u_t(y) e^{-u_t(y)}\,\mathrm{d}y, \quad \alpha = 2.1$$

Ausgabe
- Räumliche Verteilung $u_t \colon \Omega \to [0,\infty)$ zum Zeitpunkt t



Was ist ein dynamisches System?

Beispiel: Dispersion

Frage: Wie entwickeln sich biologische Populationen räumlich und zeitlich?

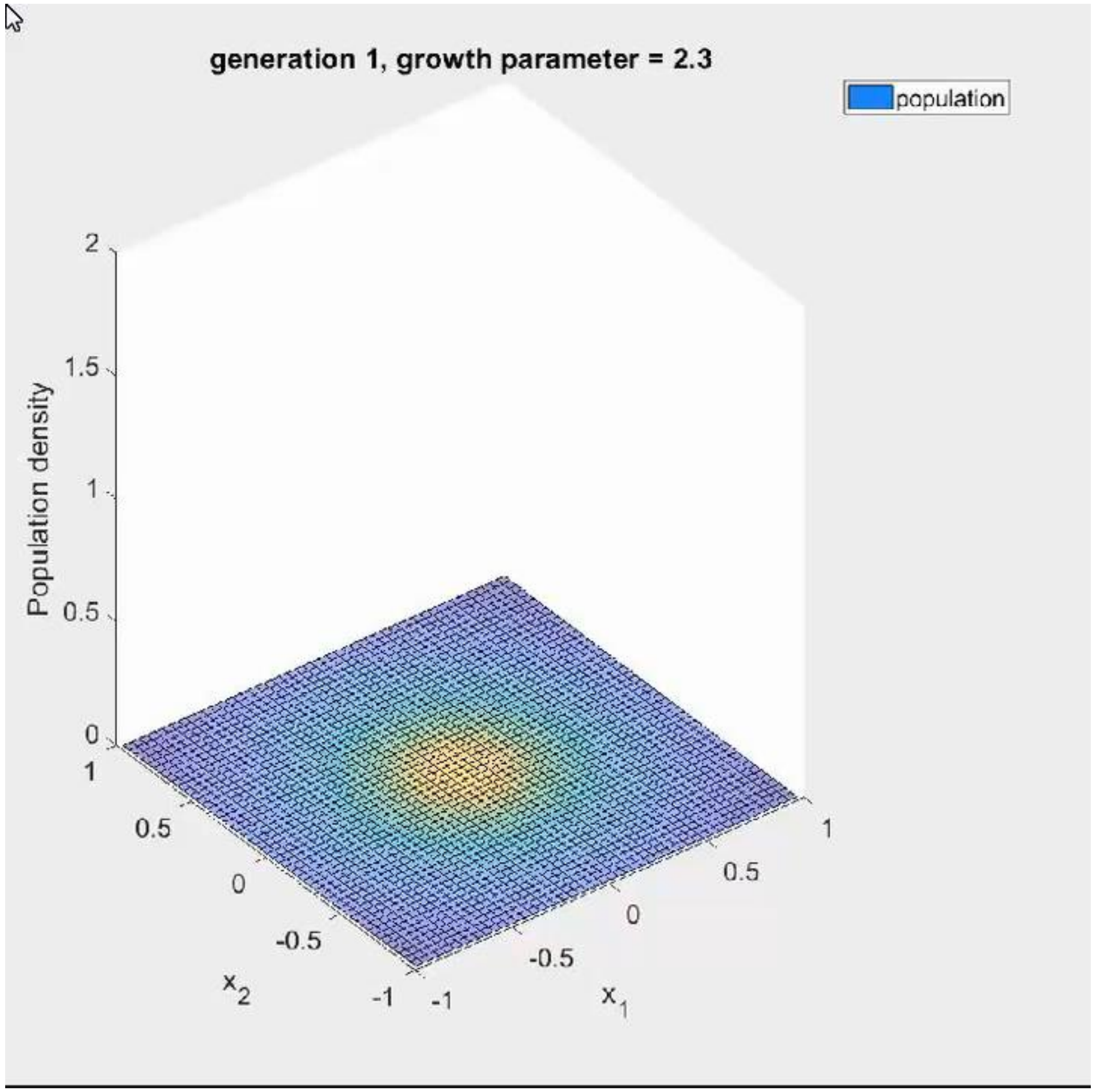
Eingabe
- Räumliche Verteilung $u_0 \colon \Omega = [-1,1]^2 \to [0,\infty)$ zur Zeit 0

Zustandsraum
- Raum aller Verteilungen (Funktionenraum)

Bewegungsgesetz

$$u_{t+1}(x) = \frac{\alpha}{2} \int_{[-1,1]^2} e^{-|x-y|} u_t(y) e^{-u_t(y)} \, dy, \quad \alpha = 2.3$$

Ausgabe
- Räumliche Verteilung $u_t \colon \Omega \to [0,\infty)$ zum Zeitpunkt t



Was ist ein dynamisches System?

Das Prinzip, Phänomene aus den Anwendungen durch mathematische Gleichungen zu beschreiben, wird als **Modellierung** bezeichnet

Weitere Beispiele

- Chemie (Reaktionsdynamik)
- Epidemiologie (Verhinderung von Epidemien)
- Medizin (Tumorwachstum)
- Raumfahrt (“Sputnik-Schock”)
- Sozialwissenschaften (Ausbreitung von Gerüchten)
- Systembiologie
- Meteorologie (“Wetter”)
- ...

Modelle

Vorteile

- Modellierung und Simulation durch dynamische Systeme ist deutlich flexibler, schneller und billiger als aufwändige Feldversuche!

Qualitative Theorie dynamischer Systeme

„... Geometrie ist nicht wahr, sie ist vorteilhaft.“
(Henri Poincaré, 1908)

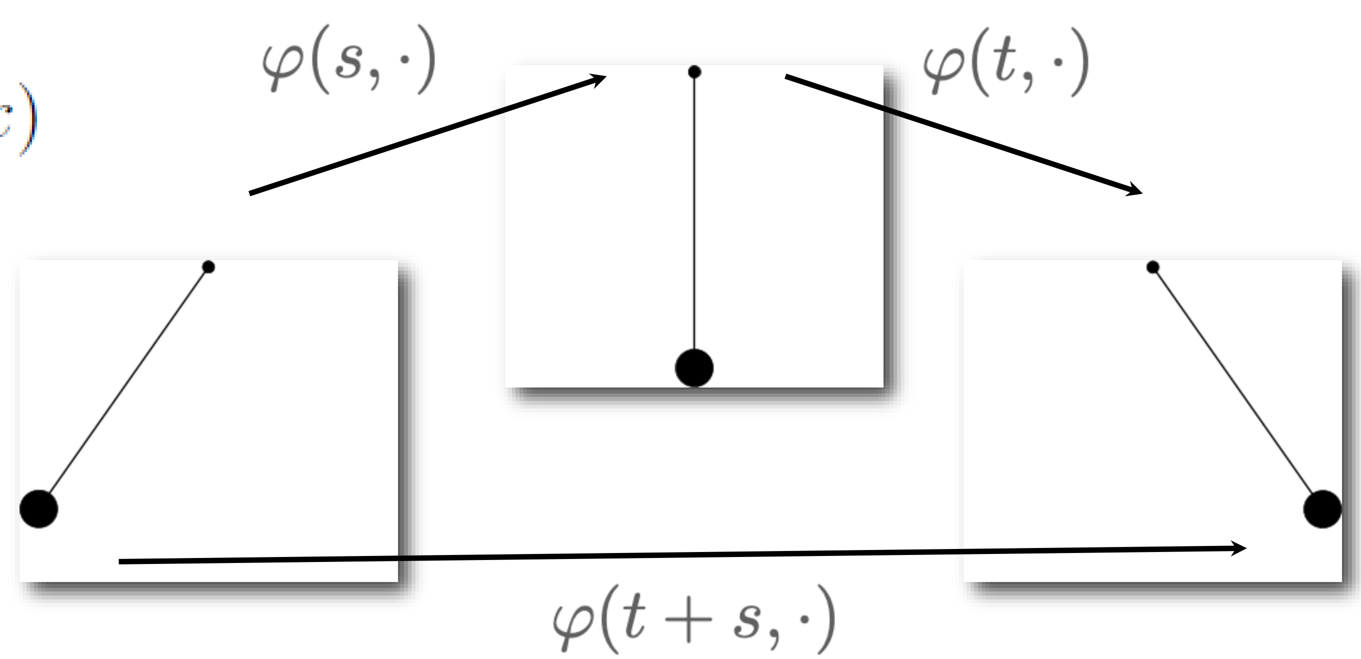
Qualitative Theorie dynamischer Systeme

Abstraktion

- Zeitachse $\mathbb{T}$ (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{R}_+$)
- Zustandsraum X (z.B. $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ oder ein Funktionenraum)
- (Halb)Fluss/(Semi-)dynamishes System $\varphi : \mathbb{T} \times X \to X$ mit den Eigenschaften

(i) $\varphi(0, x) = x,$

(ii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$



(iii) $\varphi\colon \mathbb{T} \times X \to X$ ist stetig.

Qualitative Theorie dynamischer Systeme

Problem In fast keinem relevanten Beispiel ist der Halbfluss

$$\varphi : \mathbb{T} \times X \to X$$

explizit bekannt

Grund
Der Halbfluss ergibt sich als allgemeine Lösung einer Differential- oder Differenzengleichung

$$\dot{x} = f(x) \qquad x_{t+1} = f(x_t)$$

"One cannot explicitly solve (differential)equations!"
Quelle: Unbekannt

Qualitative Theorie dynamischer Systeme

Auswege

(A) Approximiere die Lösungen numerisch
unbrauchbar für große Zeiten oder komplexe Anfangsdaten

(B) Qualitative oder geometrische Theorie: Es reicht die Existenz des Flusses
beschreibt das Verhalten für große Zeiten

“One cannot explicitly solve (differential)equations!“
Quelle: Unbekannt

Forschungsprobleme

“Synonyme zu unselbstständig:
... nicht autonom...“
(Duden)

Qualitative Theorie nichtautonomer dynamischer Systeme

Realistische Modelle

- Endogene Störungen
(saisonale Effekte, Gravitations-Effekte)

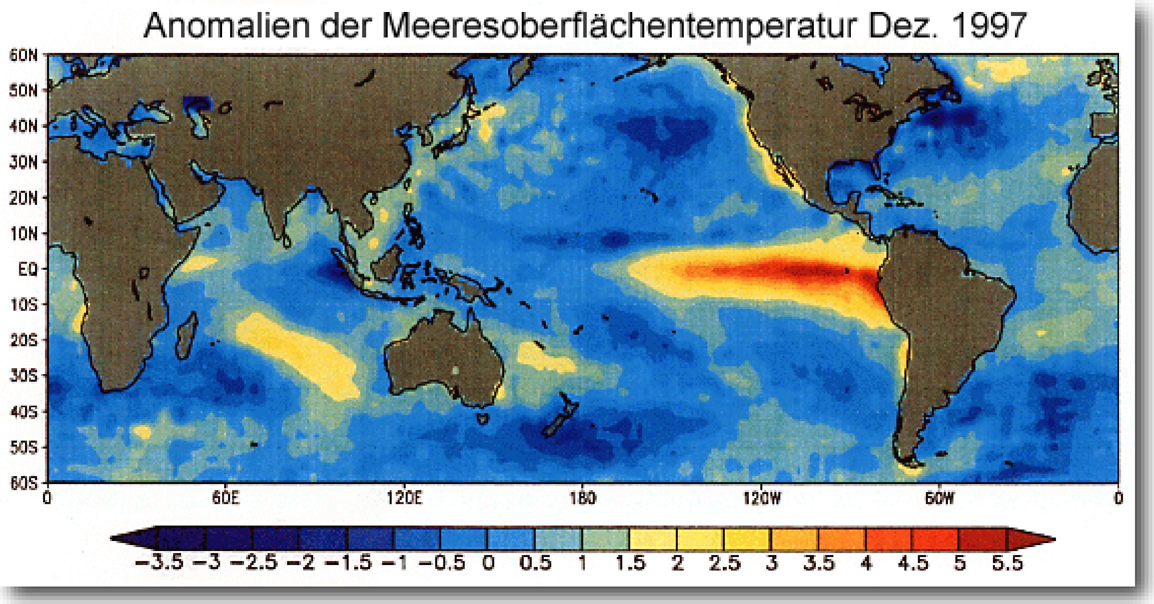
- Exogene Störungen
(Regulation, Kontrolle)

- Extern getriebene Systeme

- Zufällige Systeme

nichtautonome Systeme

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x_t = f(t, x_t)$$



El Niño Phänomen (Quelle: NCEP)

Numerische Dynamik

Der Wissenschaftsfonds.

Räumlich kontinuierliches Modell:

$$u_{t+1}(x) := \int_\Omega k(x,y) g(u_t(y))\, dy$$

Räumliche Diskretisierung:

$$u_{t+1}(x) := \sum_{i=0}^{n} w_i k(x, y_i) g(u_t(y_i))$$

Was haben beide Gleichungen miteinander zu tun?

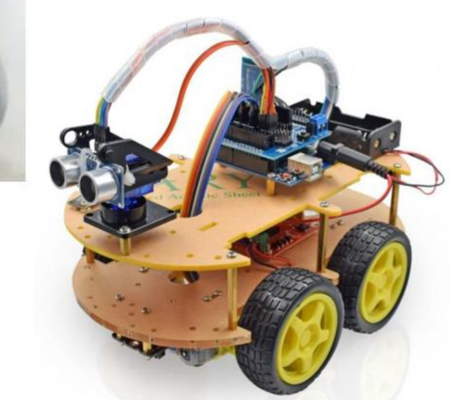
Regelung nichtlinearer dynamischer Systeme

Regelsysteme:

$$\dot{x} = f(x, \boldsymbol{u})$$



Zum Beispiel:
- mechanische Systeme: mobile Robotern, Manipulatoren, Drohnen, Autos, autonome U-Booten, Flug- und Raumfahrzeugen;
- Prozesse aus Chemie, Biologie, Medizin, Ökonomie, Ökologie, Gesellschaftswissenschaften, usw.



Typische Aufgaben: Kontrolle $\boldsymbol{u}$ zu finden, sodass das System…
- … stabil wird;
- … sich in den gewünschten Zielzustand oder entlang einer gewünschten Trajektorie bewegt;
- … sich ohne Kollision mit anderen statischen oder bewegenden Objekten bewegt;
- … einen Zielzustand in der kürzesten Zeit und mit geringster Aufwand erreicht;
- … das optimale Betriebsmodus hat.

Globale Dynamik verzögerter Systeme

Zeitverzögerte Differential- und Differenzengleichungen:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r)), \qquad x_{t+1} = f(x_t, x_{t-r})$$

Zahlreiche Anwendungen in Ingenieurwissenschaften bis zur Biologie.

Verzögerungen vertreten auf natürliche Weise in Systemen mit Feedback wegen z.B.

- Reaktionszeit
- Endliche Geschwindigkeit des Signals
- Die Zeit benögt bis die Individuen geschlechtsreif geworden sind

Achtung: für ein AWP einer verzögerten Differentialgleichung benötigt man die Erkenntnis vom x auf einem Intervall $[-r, 0]$.
D.h. es handelt sich um ein **unendlichdimensionales Problem.**

Fragen: Langzeitverhalten sämtlicher relevanter Lösungen (konstant, periodisch, …)

Bachelor- und Masterarbeiten im Bereich Dynamische Systeme

- Zufällige Differentialgleichungen (BSc)
- Monotone zufällige Systeme (BSc oder MSc)
- Numerische Fortsetzungsverfahren (BSc)
- Diskrete Sobolev-Räume (MSc)
- Zusammenhang von Attraktoren (MSc)
- Dynamik nahe invarianter Mannigfaltigkeiten (MSc)
- Verzweigung bei 2-dimensionalem Kern (MSc)
- Verzögerte Differenzialgleichungen (BSc/MSc)
- Stabilisierung und Bewegungsplanung (MSc)
- Extremwertregelungsprobleme (MSc)

Werbung! Steuerung von mobilen Robotern mit Arduino oder Raspberry Pi (**Student Hilfskraft (BSc/MSc, 20 Std/Woche)**) – **Weitere Infos bei Victoria Grushkovskaya**

Vielen Dank!

weitere Infos: https://www.aau.at/mathematik/forschung/dynamische-systeme/